Maria Cantoni 2017 (*)

Il teorema di Pitagora: un percorso a ritroso di analisi ed un possibile cammino di sintesi accanto ad Euclide.

La matematica è il linguaggio della scienza. Si ritiene allora che essa, in quanto tale, debba essere "conosciuta" per orientarsi nella società. Nella complessità del mondo di oggi questo motivo della sua importanza è certamente valido, ma limitativo se non sfruttiamo più compiutamente questa immensa creazione umana che permette di prendere coscienza della razionalità dell'uomo per usarla in modo sistematico, un passo verso la libertà della mente, perché essa, oltre che di presa di coscienza, necessita di critica.

La matematica non è facile, ma nella difficoltà si inseriscono due problematiche: anzitutto l'oggetto stesso della conoscenza, ma forse ancor di più il fatto che essa, durante il periodo scolastico, viene trasmessa in modo da non coinvolgere menti in crescita intellettuale e psicologica e in modo non consono proprio al loro sviluppo. Qui ci sarebbero mille discorsi da fare, che volutamente trascuriamo, che però sono quelli che ci hanno portato ad interrogarci sulla didattica della disciplina come sulla matematica che noi stessi abbiamo in mente proprio nel suo sviluppo logico.

Approfondiamo il discorso dal lavoro del gruppo di quest'anno intorno alla geometria facendo anche esplicito riferimento alle Relazioni tematiche (che possono essere riviste e risentite in Podcast o presentate in un GGbook (*)), elaborate con la professoressa Elisa Gallo (**), che hanno posto l'attenzione sia alla didattica che alla geometria in una rilettura di Euclide adatta ai nostri tempi. Nei discorsi fatti tale rilettura non ignora le manipolazioni degli e sugli oggetti che ognuno fa spontaneamente e su cui si può riflettere. Solitamente esse non si valorizzano, mentre contengono un grosso stimolo alla presa di coscienza, come cercheremo più avanti di evidenziare.

Il fatto che gli insegnanti abbiano posto concretamente i loro studenti di fronte ad alcuni semplici problemi derivanti dalle prove Invalsi, e ne abbiano insieme valutato i risultati, ha permesso di "porre sul tavolo" tutto o quasi l'insieme dei dubbi e delle insoddisfazioni dell'insegnamento della geometria nella solitudine di scelte difficili e di libri di testo spesso insoddisfacenti.

Mediamente i ragazzi (e sono osservazioni che potremmo generalizzare forse senza sbagliare) hanno difficoltà di fronte alle "dimostrazioni" e alla "soluzione di problemi" (qui sembra di parlare solo della scuola superiore ed in particolare dei licei, ma a questo punto gli studenti hanno già trascorso nelle aule scolastiche più di 8 anni e naturalmente questo non può che riguardare tutta la scuola).

I quesiti Invalsi proposti (che di fatto erano matematicamente a livello di scuola media inferiore) erano legati sostanzialmente alla congruenza, all'equivalenza delle aree, all'equiscomponibilità, alle caratteristiche delle forme (vi pare poco?), praticamente a tutta la geometria di base. Man mano, nel corso degli incontri, sono emersi gli scogli che possono giustificare le carenze:

1. Per tutti i livelli sembra che le concettualizzazioni che dovrebbero essere raggiunte non <u>siano mai "stabili" e non divengano quindi strumenti</u> da utilizzare per un'evoluzione concettuale. A questo proposito pare che il comportamento dello studente si avvicini di più alla matematica pre-euclidea, nel senso che è come se cercasse di risolvere problemi

"occasionali" con occasionali mezzi di pseudoconoscenza che ha orecchiato in precedenti esperienze.
2. La scuola media generalmente pone la geometria nell'ambito della misura e finisce col non approfondire il suo ambito concettuale.
3. Spesso, a tutti i livelli, gli allievi hanno difficoltà a dare verbalmente ragione di ciò che fanno o tentano di fare per rispondere alle situazioni problematiche poste e non hanno un sostegno concettuale alle eventuali memorizzazioni.

Tutto ciò ha portato a prendere coscienza della necessità di discutere coi colleghi un **percorso in verticale** (dalla scuola primaria alle superiori), perché in esso si potrebbero (o forse dovrebbero) evidenziare le difficoltà dei singoli snodi concettuali ed anche incominciare a parlare di "quale matematica", di metodologia di lavoro (punto cruciale) e di valutazione ad hoc, anche misurandosi con esperienze in classe.

Il teorema di Pitagora, che è sempre un punto focale sia per la scuola media che per il biennio, perché nella sua possibilità di essere compreso **contiene in sé praticamente tutta la geometria di base**, ha dato le suggestioni necessarie per un possibile lavoro comune mettendo in evidenza la possibilità di un nuovo e proficuo approfondimento.

Abbiamo così parlato di accostare **"un percorso a ritroso"**, cioè di domandarci, di fronte al Teorema di Pitagora, quali fossero i prerequisiti necessari alla sua conquista non nella loro globalità, ma gradino per gradino, per prendere coscienza di quali siano man mano gli strumenti necessari a tale conquista e in che modo debbano essere preparati per divenire stabilmente tali. Per arrivare a… ho allora bisogno di alcuni "strumenti" che man mano mi costruisco, e che saranno usati coscientemente come fondamenta per i passi successivi e modelli nel loro modo di essere cercati.

Ma questo è ciò che ha portato Euclide a comporre il primo libro degli Elementi!

Possiamo così riflettere in modo nuovo sulla geometria euclidea, forse cercando di capire la straordinaria sintesi di Euclide, e permettendoci un po' "arrogantemente" di entrare nella sua mente nel processo di elaborazione e non solo nel suo risultato. Egli ha cercato di "rimettere insieme" la matematica del suo tempo in un rigore logico inconcepibile fino ad allora, che è divenuto un paradigma. In qualche modo anche il suo superamento, che nei secoli scorsi ha portato alle geometrie non euclidee e ad assiomatiche astrattamente più complesse (si è ritenuto piano" che pare proprio il modello di ciò che sta sotto i nostri piedi, <u>potrà poi far arrivare a comprendere le concettualizzazioni di grande astrazione che richiedono la matematica e in generale la scienza di oggi.</u>

Di Euclide si sa pochissimo. Nella "Storia della matematica" di Carl Boyer, leggiamo che

"*… la morte di Alessandro Magno aveva portato lotte intestine tra i generali dell'esercito greco. Ma nel 306 a.C. il controllo della parte egiziana dell'impero era ormai saldamente nelle mani di Tolomeo I, e questo monarca illuminato fu così in grado di volgere la sua attenzione verso sforzi costruttivi. Fra i suoi primi decreti vi fu l'istituzione ad Alessandria di una scuola o accademia, nota come il Museo, che non aveva pari a quei tempi. A insegnare in quella scuola chiamò un gruppo di eminenti studiosi, tra cui Euclide, l'autore del più fortunato manuale di matematica che sia mai stato scritto: gli "Elementi".*

Il Museo di Alessandria non era molto diverso dai moderni istituti di insegnamento superiore. Alcune facoltà probabilmente eccellevano nella ricerca, altre erano meglio dotate dal punto di vista
necessario di fondare il rigore in una più complessa astrazione, esplicitando ciò che Euclide
credeva di potere assumere implicitamente e intuitivamente), non ha cancellato la genialità della sua opera. Per quanto riguarda la scuola pensiamo che la comprensione della struttura della sua opera, con “contenuti” capaci tutt’ora di approssimare la realtà di tutti i giorni lavorando su “quel
amministrativo ed altre ancora si segnalavano per l’abilità didattica dei loro insegnanti. Dalle testimonianze che abbiamo, sembrerebbe che Euclide rientrasse in quest’ultima categoria; infatti a lui non viene attribuita nessuna nuova scoperta e la sua fama era dovuta alle sue capacità espositive. È questa la chiave del successo incontrato dalla sua opera maggiore, gli Elementi, composti da tredici libri.”

Quello che però troviamo leggendo la sua opera (e qui ci interessa il libro primo) non è l’“esposizione didattica ai suoi eventuali studenti”, ma la sintesi matematica del suo lavoro che, proprio come tale, è difficile perché ci dà i rigorosi risultati della sua rielaborazione. Noi avremmo invece bisogno di percorrere con i nostri studenti il processo mentale che ha portato a quel percorso che è ovviamente implicito, ma di non facile lettura.

Ciò che abbiamo trovato interessantissimo in questa direzione è il commento-introduzione di Attilio Frajese all’edizione degli ELEMENTI DI EUCLIDE [UTET 1970, nella riedizione del 1980, a cura di Attilio Frajese e tradotto da Lamberto Maccioni].

(Una precedente edizione degli Elementi si deve al grande matematico Federico Enriques negli anni tra il 1924 e il 1930).

Riporto qui parte dello scritto di Frajese non rispettando completamente la sequenzialità del suo discorso per entrare meglio nelle nostre problematiche. La sua introduzione comincia così:

“*Euclide questo sconosciuto!*

Può sembrare strano che proprio con questa esclamazione venga introdotta una nuova edizione italiana degli Elementi, l’opera di questo “sconosciuto” che ha valicato i secoli!

Ma effettivamente, di Euclide come persona sappiamo poco o nulla, sicché è assolutamente impossibile fornire di lui al lettore una sorta di bibliografia.

Una delle testimonianze più importanti su Euclide è certamente quella di Proclo che pur vivendo nel V secolo d. C risulta aver lavorato su fonti ben più antiche e che sembrano del tutto attendibili.”

E continua:

“*Essi* (gli Elementi) *offrono un panorama della matematica elementare greca del suo tempo: aggiungiamo che, nello sviluppo di questa, rappresentano al tempo stesso un punto di arrivo ed un punto di partenza.*

Inutile cercare l’originalità vera e propria negli Elementi di Euclide: quest’opera, infatti, riassume, utilizza, coordina, sistema, l’opera dei matematici predecessori, offrendone una validissima sintesi che al tempo stesso è analitica nella vastità della sua intelaiatura” (che noi vorremmo cercare di capire con i nostri allievi!)

“Ma l’opera di Euclide costituisce punto di partenza anche sotto un altro profilo: gli elementi passano attraverso i secoli costituendo fin quasi ai giorni nostri la base essenziale della matematica elementare pressoché in tutti i paesi.

Se è vero che il rigore moderno ha trovato pecche in quello euclideo, è pur vero che Euclide cerca di raggiungere il massimo rigore instaurabile nell'ambiente storico scientifico al quale appartiene. …Presso i posteri gli Elementi vennero considerati come modello di arte didattica.

In un aneddoto su Euclide si narra che un discepolo, dopo aver imparato taluno dei primi teoremi, chiese ad Euclide: Maestro, quale utile ricaverò imparando queste cose? Euclide chiamò allora un servo e gli diede ordine di dare qualche moneta al malcapitato discepolo perché voleva trarre profitto da ciò che imparava.

L'aneddoto allude evidentemente al carattere strettamente teorico degli elementi: ***in essi Euclide non si rivolge mai alla pratica. Invano si cercherebbe negli Elementi la benché minima regola di misura o di calcolo: ne vengono forniti soltanto i presupposti teorici."***

Abbiamo evidenziato questo punto sottolineato da Frajese, perché fa emergere come l'accostamento alla geometria euclidea **possa difficilmente avvenire tout court e** come dovrebbe essere invece accompagnato dalla comprensione di come "parla" e del perché quel modo di "parlare" racconti le "ragioni" dei risultati che man mano si raggiungono e che sono quelli che servono per rispondere a certi problemi.

"*Gli Elementi non costituiscono un trattato completo e forse non possono neppure dirsi un trattato in senso moderno: costituiscono piuttosto un gigantesco sistemi di lemmi, ossia di proposizioni che hanno valore e vengono quindi* ***introdotte nell'opera solo in quanto servono per introdurre altre proposizioni seguenti che su di essi si fondono.***

Proclo ci fa sapere che fu Talete di Mileto a trasportare la geometria dall'Egitto alla Grecia e ad iniziare uno studio autonomo della geometria stessa.

Dopo Talete campeggia la grande figura di Pitagora, al quale si deve, secondo Proclo, l'inizio di una vera geometria scientifica sia per i processi dimostrativi sia per il distacco dalla materia cioè per la considerazione di enti geometrici idealizzati (scuola Pitagorica).

È dunque in seno a detta scuola che si verifica il ***colpo d'ala della geometria*** *greca la quale si distacca dalla pratica di misure e di calcoli della geometria pre-ellenica ed assurge a insegnamento liberale, instaurando la precisione attraverso la considerazione degli enti idealizzati. Proclo tratteggia poi la formazione del sistema degli Elementi, cioè l'elaborazione di quei procedimenti che da un insieme di risultati non collegati o mal collegati tra di loro conducono ad una sistematicità espositiva …* ***nella quale si parte da semplici proposizioni iniziali per dedurre proposizioni a mano a mano più complesse.***

Con la primitiva scuola pitagorica ha inizio la vera formazione del sistema degli Elementi: si parte cioè da qualche proposizione complessa e significativa risalendo, col processo detto di analisi, a proposizioni via via più semplici dalle quali quelle complesse dipendevano. Il metodo espositivo degli Elementi corrisponde al cammino inverso (detto di sintesi) che dalle semplici proposizioni iniziali "ridiscende" a quelle più complesse fornendone la dimostrazione, cioè facendo vedere che esse dipendono da quelle semplici iniziali.

Secondo Georg Hieronymus Zeuthen (grande matematico e storico della matematica danese, Esbjerg, 1839 – Copenaghen, 1920) la proposizione complessa che avrebbe suscitato nei matematici il desiderio, il bisogno della dimostrazione, sarebbe stato il teorema detto di Pitagora sul triangolo rettangolo. "

Penso che si cominci a capire la reale portata del discorso che stiamo facendo. Forse parrà qui molto complesso, ma comprendendolo ci si aprirà un "nuovo mondo" intorno alla matematica!

Certamente Euclide aveva ben presente il problema del “quadrato doppio”, come troviamo anche nell’esperimento maieutico (che noi porteremo in altra direzione) di Platone nel Menone:

Socrate disegna sul terreno un quadrato di 2 piedi per lato e chiede allo schiavo di trovare la misura del lato del quadrato che abbia area doppia rispetto a quello disegnato.

Prima di riprendere il discorso, tentiamo di vedere come già nella scuola primaria possa avvenire col gioco una semplice manipolazione per arrivare ad una soluzione concreta del problema:

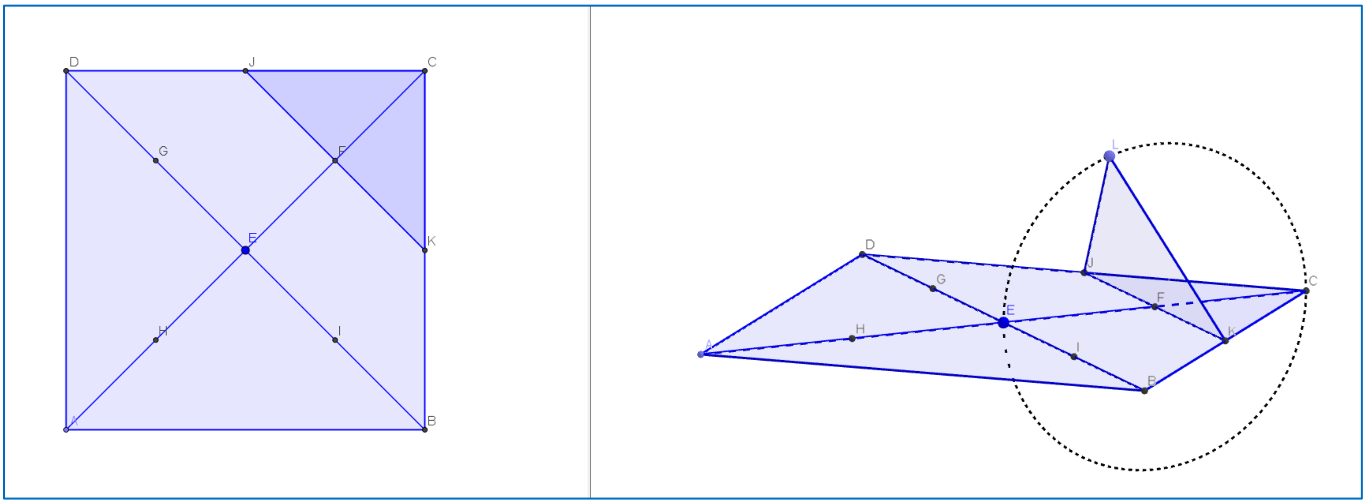


Figura 1

Come vediamo in Figura 1, per esempio possiamo partire da un quadrato e cercare il “quadrato metà”; apparentemente abbiamo l’opposto di ciò che cercavamo, ma arriviamo a metterci di fronte ad una situazione di grande interesse (Figura 2):

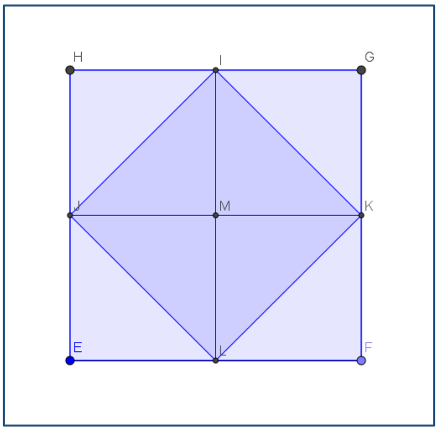


Figura 2

Manipolando abbiamo fatto un “ribaltamento” (usando la parola ora col significato del parlare comune) in modo che i punti HGFE cadessero su M. Il triangolo IGK si sovrappone a MIK (ecc.) e questa sovrapposizione è un confronto che porta spontaneamente all’uguaglianza. <u>Quando e come analizzare questo risultato e “strutturarlo” come operazione di corrispondenza sul piano tra i punti M e G secondo ben precise regole, come quelle di **simmetria**?</u> Teniamo conto che questo “gioco”, che qui abbiamo evidenziato al nostro livello, è comunissimo anche nella scuola dell'infanzia, e già nella primaria, se ben approfondito, porta all'angolo retto, alla perpendicolarità, e anche verso il parallelismo, e a lavorare sulle forme….

Mi sono soffermata su questo punto per cominciare a vedere come, facendo leva su manipolazioni concrete sugli oggetti, si compiano azioni che possono divenire modello di astrazioni geometriche utili accanto ad Euclide (soprattutto proprio là dove didatticamente non è neppure conveniente fare molte delle dimostrazioni euclidee che essendo intuitivamente scontate e "pesanti" sarebbero inadatte agli studenti, come nel caso riguardante le proprietà degli angoli di un triangolo isoscele che una simmetria risolve elegantemente oltre che semplicemente); astrazioni che solitamente vengono richiamate a parte nei libri di testo in un capitolo a sé: **le trasformazioni**. Tale isolato capitolo finisce in tal modo a separare le cose, come se ci fossero "due geometrie" che non si legano in una lettura di Euclide più consona ad una visione attuale. Approfondiremo il discorso.

Guardando al quadrato di area doppia da un altro punto di vista (Figura 3):

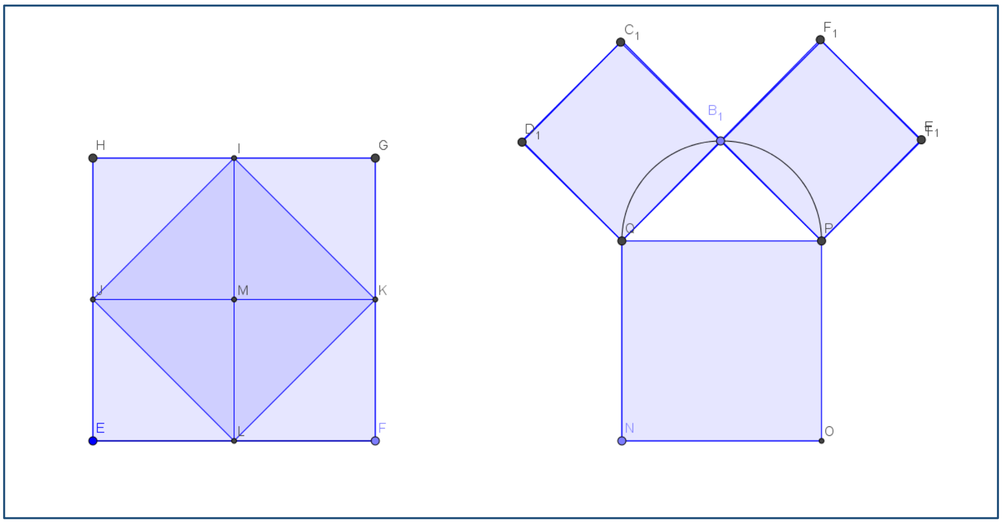


Figura 3

vediamo che emerge il triangolo rettangolo isoscele che mette in evidenza il quadrato sull'ipotenusa, doppio di quello sui cateti uguali.

Qui inizia la nostra storia che riuscirà naturalmente a prendere in considerazione solo gli snodi concettuali più eclatanti, ma che speriamo implicitamente possa richiamare tutto ciò che è altrettanto determinante…

"Pensiamo" che Euclide generalizzi la situazione precedente e cominci a farsi delle domande (Figura 4). Euclide vede "figure" note, "aree"…, ma in che modo le "possiede" davvero, ha in mano la capacità **di leggerle nelle loro caratteristiche, di collegarle, di confrontarle con una logica rigorosa, perché sarà questa che gli permetterà di risolvere come desidera la generalizzazione portata**? Da dove partire allora? Leggiamo ancora Frajese:

"….le figure geometriche sono per Euclide argomento di studio e di considerazione geometriche. Ma poiché le figure possano divenire oggetto di studio, occorre stabilire un collegamento tra di esse: nella matematica moderna il concetto di corrispondenza mette pure in opera collegamenti, e così gli elementi di un insieme vengono collegati tra di loro attraverso la struttura che l'insieme riceve, mediante operazioni definite con date proprietà."

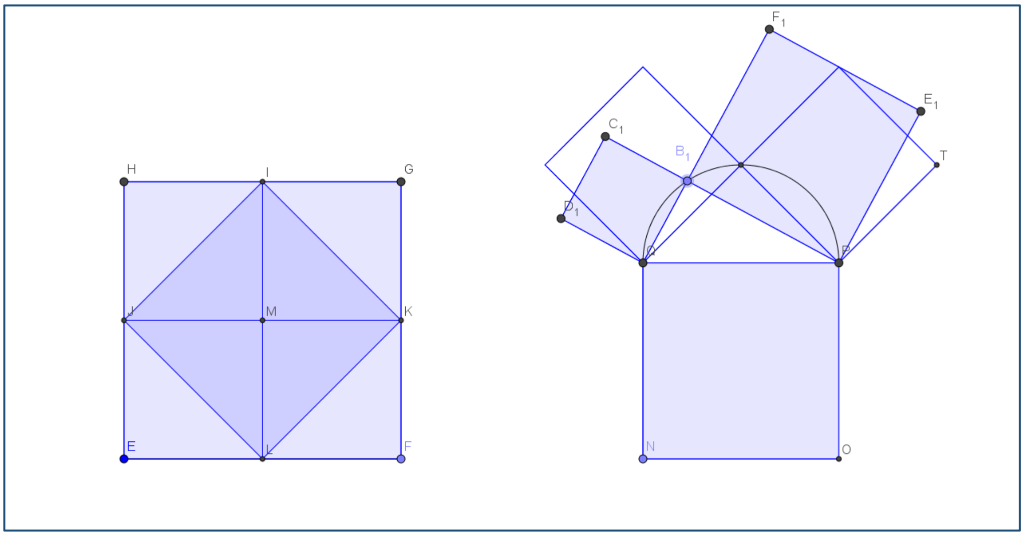
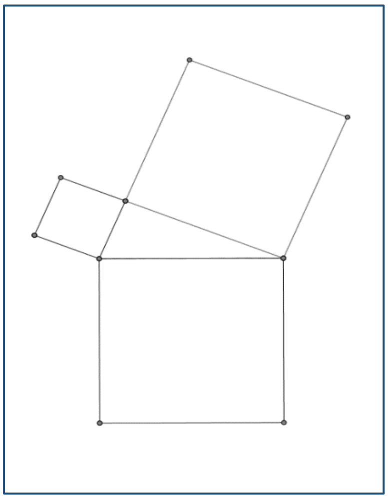


Figura 4

Nota bene



"Per Euclide il collegamento tra figure si effettua <u>mediante costruzioni ed altri mezzi che si chiede di poter adoperare</u>: richiesta che verrebbe appunto, secondo la nostra veduta, effettuata nei "postulati" (i postulati offrono una sorta di <u>implicita definizione).</u> Per esempio noi non definiamo punto e retta, ma enunciamo il postulato "due punti determinano una retta ed una sola": non siamo ora più liberi di attribuire a punto e retta un significato arbitrario, dobbiamo attribuire loro un significato tale che essi soddisfino a quel postulato..."

Euclide astrae dalla realtà prima di tutto <u>punto, retta e piano</u>, dando per scontato che da essa provengano (esistano in essa), ma per divenire subito astrazioni che non sono quelle che i libri di testo "disegnano". Quei disegni al più potrebbero essere dei modelli grafici di riferimento che però quasi sempre rimangono invece "oggetti concreti" portando gravemente fuori strada.

Come compiere questo primo passo? Guardiamo ai bambini piccoli: quando incominciano a "scarabocchiare" non più solo ghirigori, ma volendo "riprodurre" qualche cosa, fanno dei "disegni" con cui rappresentano inconsciamente, ma intenzionalmente tutto ciò che quei segni grafici sanno richiamare. In un certo senso se li <u>"portano in testa"</u> e tornano a quelle immagini per ricostruirli opportunamente. Incominciare a sollecitare quelle immagini alla scuola materna e primaria per ritornare ad esse per disegnare coerentemente, potrebbe portare a far "geometria" come presa di coscienza dei nostri comportamenti. Ad essi sarà poi facile aggiungere le osservazioni sulle manipolazioni quotidiane con gli oggetti. Esse contengono in sé quel **trasporto rigido** che tutti danno per scontato e **che è alla base delle elaborazioni euclidee** (Frajese afferma addirittura come il primo criterio possa essere considerato una sorta di "postulato" legato allo spostamento rigido) che potremo accostare in una nuova luce.

Euclide astrae dalla realtà punto retta e piano, ma comincia subito a metterli in relazione come premessa su cui far leva.

- Dati due punti essi sono gli estremi di una “retta”. (segmento, distanza)
- Questa retta può essere continuamente prolungata.
- Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (raggio).
- Tutti gli angoli retti sono uguali tra di loro.

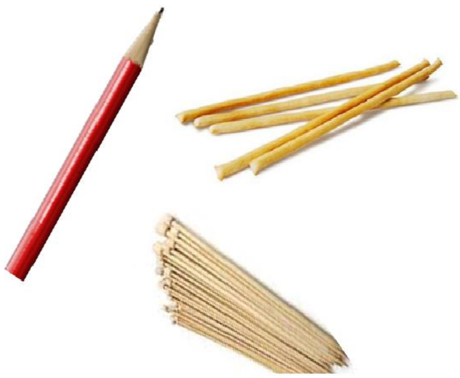
Diamo per scontate queste relazioni, diciamo che Euclide “postula”, il risultato è quello che possiamo evidenziare con riga e compasso, <u>ma Euclide non “possedeva” riga e compasso come oggetti concreti, ma mentali …</u>

Guardiamo le cose più da vicino in un modo nuovo per poi tornare ad Euclide.

Da PARLIAMO DI GEOMETRIA Una reinvenzione guidata

25 ottobre 2016

Come costruisco gli «oggetti» che diverranno i nostri strumenti per descrivere la realtà



Vediamone un esempio …

Dagli oggetti la percezione coglie qualcosa che è ad essi comune. Prevale in essi la «lunghezza» …… Rappresentiamo quello che abbiamo percepito in ***astratto*** *richiamandoci ad un oggetto* ***concreto*** *che attualizza meglio di altri la situazione: il filo teso*

Abbiamo così costruito un nuovo oggetto, il «segmento»

che la geometria considera una figura geometrica costituita da punti

tra i punti gli estremi sono privilegiati, in essi il segmento inizia e termina.

Ma come arrivo a concettualizzare la «lunghezza»?
Quando due segmenti hanno la stessa «lunghezza»?

La risposta è: se riesco a sovrapporli ....

Euclide lo fa immaginando il movimento, «oggi» usiamo le trasformazioni con le quali si costruiscono classi di equivalenza ciascuna costituita da segmenti sovrapponibili.
Ogni classe è una **lunghezza** che a questo punto è diventata un vero concetto matematico costruito razionalmente.

Ottengo un concetto della geometria, funzionale alla lettura della realtà che non è più la realtà

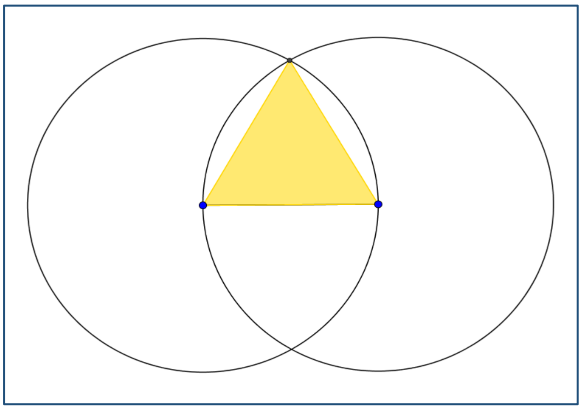


Figura 5

Tornando ad Euclide vediamo che egli, a questo punto, è in grado di costruire dando completa ragione di quello che fa e tenendo presente solo le premesse poste; il segmento ed il cerchio da "oggetti" diventano strumenti e ci troviamo di fronte alla prima proposizione (Figura 5), la costruzione del

triangolo equilatero.

Anche gli studenti possono costruirlo con la stessa cognizione di causa.

Il triangolo equilatero a questo punto diviene strumento ed Euclide lo usa per costruire **in un punto dato una "retta" uguale ad una "retta" data,** che è la proposizione successiva, sempre dimostrando la validità della costruzione.

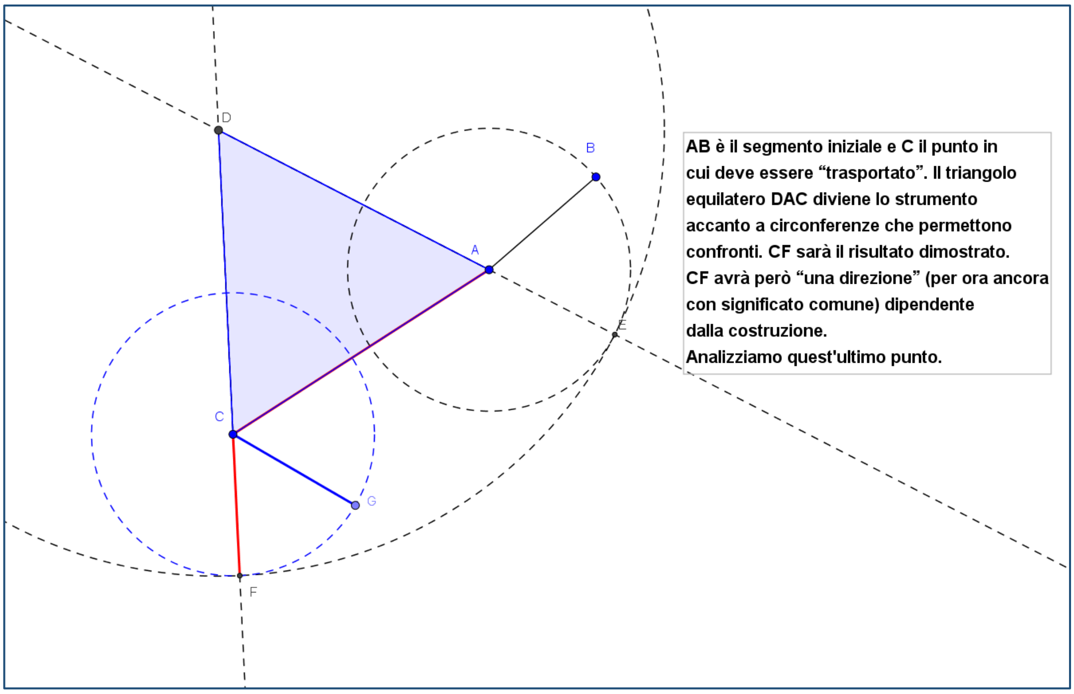


Figura 6

La circonferenza di centro C (Figura 6) rimanda al nostro discorso sottostante e non ad Euclide (o meglio Euclide può costruirla ed usarla: se C appartenesse ad una retta data, allora la circonferenza intersecherebbe la retta e troverebbe il segmento su di essa, cosa che poi sarà sfruttata per costruire un triangolo dati tre segmenti tali che…)

Credo che questa “costruzione”, perfettamente dimostrata con le premesse e gli strumenti già raggiunti da Euclide a questo punto del suo percorso, non venga mai fatta vedere a scuola, cosa che mi pare ovvia (è inutilmente laboriosa), ma che meriti un approfondimento per noi insegnanti.

Se ci poniamo il problema di disegnare in un punto qualunque un segmento “uguale” ad uno dato AB che giace in una certa posizione sul piano (pensiamo di lavorare per ora sul foglio di carta, ma anche rappresentando con l’uso di un software non cambierebbe la situazione), prendiamo normalmente un oggetto concreto che chiamiamo compasso, un concreto oggetto “rigido” e con un “confronto meccanico”, apriamo i suoi rebbi perché combacino con gli estremi del segmento disegnato, sempre con movimento meccanico (spostamento rigido) poniamo la punta del compasso nel punto desiderato C, e tracciamo una circonferenza che ha così raggio uguale al segmento dato AB. Sulla circonferenza prendiamo poi un punto qualsiasi G (o opportuno secondo il contesto) ed alla fine avremo il segmento CG = AB. Ma tutto questo semplice lavoro non è per nulla “seguire Euclide” se è quello che vogliamo portare in classe!

Il “compasso di Euclide” è un puro pensiero e soprattutto ha bisogno di due punti espliciti per poter arrivare alla circonferenza. Noi invece abbiamo trasformato l’idea in un oggetto concreto che alla fine può “ruotare”. In pratica abbiamo intuitivamente dato per scontato che ci sia “una classe di equivalenza”, cioè che nel piano di quei segmenti ce ne siano infiniti e quindi anche uno con estremo in C (muovendo “rigidamente” il compasso); poi disegnando la circonferenza abbiamo usato “una rotazione” ed implicitamente espresso l’idea che tutti i punti G sulla circonferenza sarebbero stati “equivalenti” per darci il risultato del problema. Ma con tutto questo lavoro intuitivo che manipolazioni abbiamo ragionevolmente fatto e perché ci paiono coerenti?

Euclide ha invece compiuto una costruzione rigorosamente dedotta dagli strumenti concettuali raggiunti. Allora mi domando, non sarebbe importante qui parlare di equivalenza e “strutturare” esplicitamente questa composizione di “spostamenti rigidi” in traslazione e rotazione? È ciò che implicitamente abbiamo fatto ed accettato di fare. In tal modo espliciteremmo regole “nostre” che vengano a fare qualche cosa di molto utile e preciso in una lettura di relazioni tra le forme in gioco nelle situazioni in cui ci troviamo.

Euclide, pensando allo spostamento rigido, subito dopo la costruzione di “segmenti uguali” sente infatti la necessità (e “vede” ed esplicita) di arrivare alle condizioni sufficienti per il confronto di due triangoli (ciò che chiamiamo primo criterio). Quali conseguenze possono scaturire da ciò che abbiamo evidenziato?

Abbiamo parlato di composizione di “spostamenti rigidi”, di traslazione e rotazione. Un cenno allora (naturalmente da riprendere) anche alla traslazione che ci pare molto importante. Guardiamo per questo per un momento all’angolo. Euclide lo dà per scontato dall’intersezione di rette (per gli studenti non è così semplice valutare la sua portata sin dall’inizio e se ne dovrà parlare con attenzione).

Di fatto per Euclide le rette si incontrano o non si incontrano e con la proposizione 11 e seguenti egli si occupa di analizzare gli angoli che emergono dalla loro intersezione quando essa esiste.

Visto che però abbiamo tenuto presente lo “spostamento rigido” che per Euclide è essenziale per parlare di eguaglianza come confronto per sovrapposizione (se due “oggetti” sono uguali portati a sovrapporsi attraverso un cammino qualunque, coincidono) continuiamo a mantenere l’idea delle classi di equivalenza. Di fronte ad un oggetto, noi diamo per scontato che esso appartenga ad una classe di infiniti oggetti ad esso equivalenti, (nel caso di cui parliamo uguali in ogni caratteristica), ed analizziamo il cammino che ci porta opportunamente da uno all’altro in modo da strutturare in che modo siano legati i punti corrispondenti tra di loro.

Consideriamo la retta AB ed una seconda che l’interseca ed evidenziamo l’angolo che le lega nella loro intersezione (Figura 7):

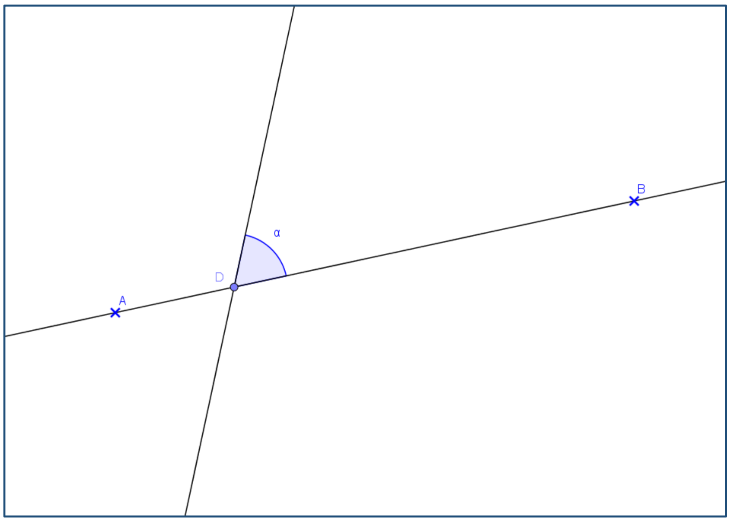


Figura 7

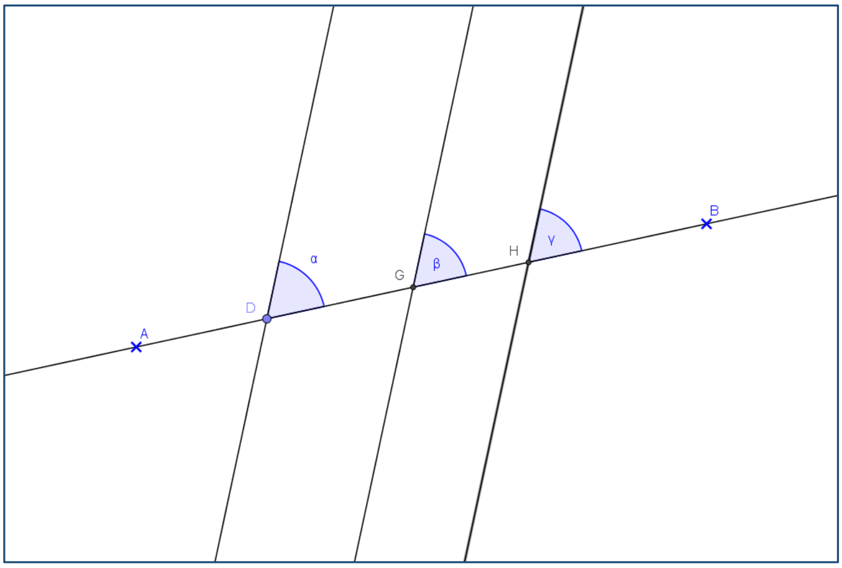


Figura 8

Ma subito cominciamo a pensare alla classe delle rette che formano lo stesso angolo con AB (Figura 8). Esse sono equivalenti proprio per la loro relazione con AB. Diciamo che tali rette hanno la stessa "direzione" rispetta ad AB, la classe determina tale direzione.

La traslazione sarà allora uno "spostamento rigido" che porta i punti del piano in altri corrispondenti mutati in una stessa direzione, in uno stesso verso e con la stessa distanza. Potremo comunicare ciò con una "freccia" (vettore) che contiene in sé tutte le informazioni che determinano il "cambiamento voluto":

Tutto ciò come premessa al "primo criterio" porta la mente a vedere gli oggetti nella loro infinita "pluralità". Possiamo poi metterci nelle condizioni di pensare che le trasformazioni a cui abbiamo accennato, divenendo uno strumento per confrontare, ci portino a **vedere le proprietà di cui si occupa la geometria come quelle che sono invarianti nelle trasformazioni che abbiamo preso in considerazione, attraverso le classi di equivalenza.**

Con queste trasformazioni sostanzialmente ci occupiamo degli spostamenti rigidi che intuitivamente inducono un *non* cambiamento nella figura, ma per i quali se nulla è mutato, certamente è cambiata la relazione della stessa con l'ambiente in cui si trova, punto fondamentale che risolverà molti problemi. Siamo con Euclide con un altro linguaggio.

Nelle proposizioni 13 e 14 Euclide ritorna ad evidenziare l'angolo intersezione di due rette considerando prima la perpendicolare per poi generalizzare. Anche qui "ci fa comodo introdurre" l'"angolo piatto" di cui Euclide non parla mai e tutto ciò semplifica la visione di angoli "adiacenti".

Fino alla proposizione 26 Euclide approfondisce i triangoli, soprattutto evidenziando nelle proposizioni 16 e 17 importanti relazioni tra gli angoli come nella 20 una relazione tra i lati. La 17 è fondamentale ed afferma e dimostra che un angolo esterno di un triangolo è sempre maggiore di ciascuno dei due non adiacenti.

Arriviamo alla proposizione 27 per entrare in un nuovo mondo. Basandosi sulla 17 Euclide porta in evidenza e dimostra quando due rette non si possono incontrare:

- Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni interni uguali tra di loro, le due rette saranno tra di loro parallele *(non potranno incontrarsi)*

Ma dopo i discorsi fatti sopra guardando alla situazione della Figura 9:

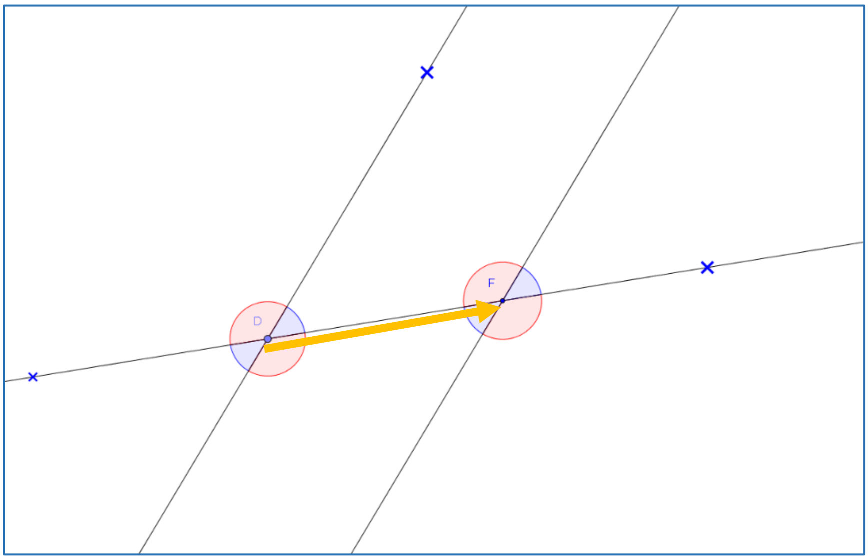


Figura 9

ci rendiamo conto che possiamo vedere le due rette come risultato di una t<u>raslazione </u>(secondo le indicazioni del vettore giallo) e che esse determinano una direzione mantenendo l'angolo di riferimento con la retta che intersecano. La "direzione" è determinata da una classe di rette parallele!

Viceversa col quinto postulato

- *Se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni dalla stessa parte minore di due retti, le due rette prolungate verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*

dal "nostro punto di vista" abbiamo "in mano" che due rette traslate come sopra e quindi parallele mantengono gli angoli. <u>Parallelismo e angoli che si mantengono come intersezione con una trasversale sono strettamente correlati.</u>

Da qui diviene semplice arrivare alla somma degli angoli interni di un triangolo proprio con la dimostrazione di Euclide (proposizione 32) che completa le proposizioni precedenti come la 17.

Consideriamo ora due rette parallele (legate quindi in una traslazione). Parlando allora molto semplicemente le possiamo guardare come formanti una "striscia" ed evidenziare la loro **"distanza**" (tutto un discorso da approfondire molto bene), **il segmento di perpendicolare intercettato dalle rette stesse**. Se analizzata bene, questa distanza potrà intervenire a definire l'altezza dei quadrilateri e dei triangoli e potrà toglierci dalla difficoltà banale, ma consueta che essa pone generalmente in tale ambito (ne parleremo a lungo). A questo discorso si legano due punti fondamentali della costruzione geometrica:

a. La "presa in mano" delle forme (quadrilateri e triangoli) raggiungendo le loro proprietà con semplicità e rigore;
b. Il confronto di aree attraverso l'equivalenza.

Due coppie di strisce che si intersecano delimitano una "regione" particolare: i lati sono paralleli a due a due, e gli angoli **conseguentemente sono uguali a due a due**. Questo quadrilatero (che chiameremo **parallelogramma**) emerge quasi "per magia" con le sue proprietà rigorosamente dedotte dal parallelismo approfondito come detto sopra. Possiamo esplicitare in un disegno (Figura 10) tutte le informazioni che riceviamo dalla coppia di rette parallele che si intersecano (1), e vedere la differenza con il disegno che vediamo nei libri di testo (2) quando introducono un parallelogramma:

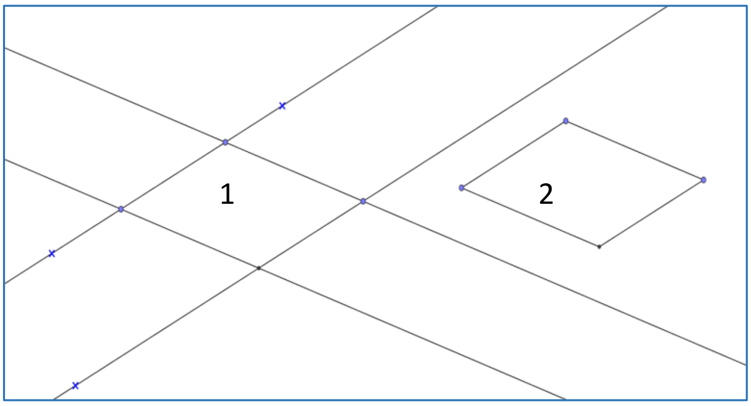
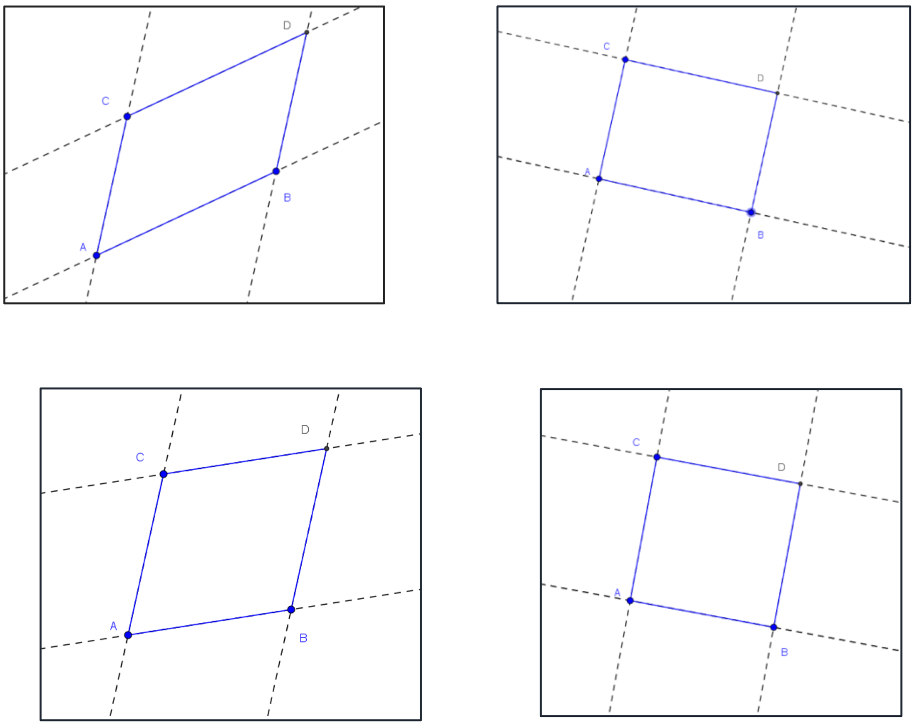


Figura 10

(Del resto Euclide quando “descrive” i poligoni sottolinea: figure rettilinee sono quelle comprese tra rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro ……)

A questo punto con la variabilità dell’inclinazione reciproca delle due “strisce” possiamo passare al rettangolo o al rombo e al quadrato con l’altezza delle strisce, sempre traendo rigorosamente ma molto semplicemente le caratteristiche dei nuovi particolari parallelogrammi (i software di geometria possono aiutare molto in questo approfondimento non perché la dinamicità che osserviamo sia la trasformazione, ma perché suggerisce e fa tenere presente alla mente da dove venga la corrispondenza finale che struttureremo).



È immediato vedere poi come quando vi sia un angolo retto lo siano necessariamente tutti e quattro, e come sia facile osservare anche ciò che emerge con le diagonali attraverso cui sarà possibile definire il quadrilatero stesso.

Abbiamo “in mano” le forme (aggiungiamo qui il problema che ne deriva dei ricoprimenti, delle tassellazioni, del “teorema in atto” come dice la prof.ssa Gallo, che abbiamo visto non essere mai così scontati per gli studenti: già col gioco del Tangram hanno trovato difficoltà a dare ragione di ciò che avevano di fronte).

Un cenno per superare i parallelogrammi in Figura 11, su cui potremo dire molte cose…:

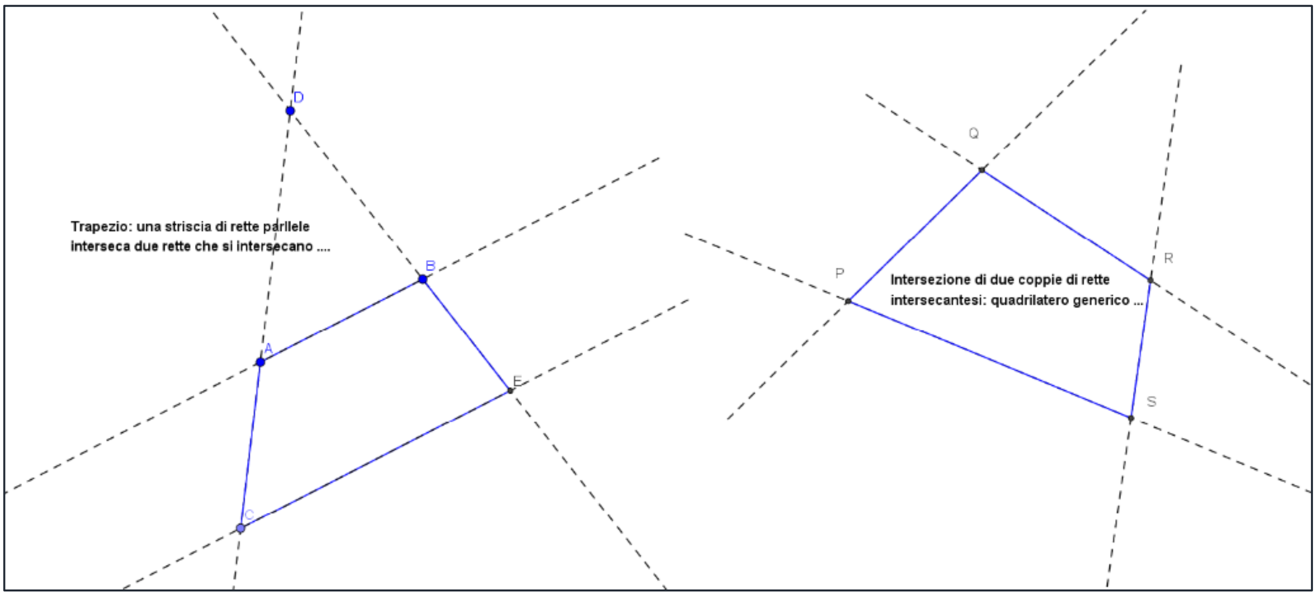


Figura 11

Ma la geometria è la scienza del confronto e la coppia di rette parallele che abbiamo preso in considerazione, quella “striscia” che “contiene parallelogrammi”, ci permette di metterli in relazione e di evidenziarne l’equivalenza. Euclide approfondisce molto bene tutto ciò perché è quello che gli permetterà di raggiungere il Teorema di Pitagora.

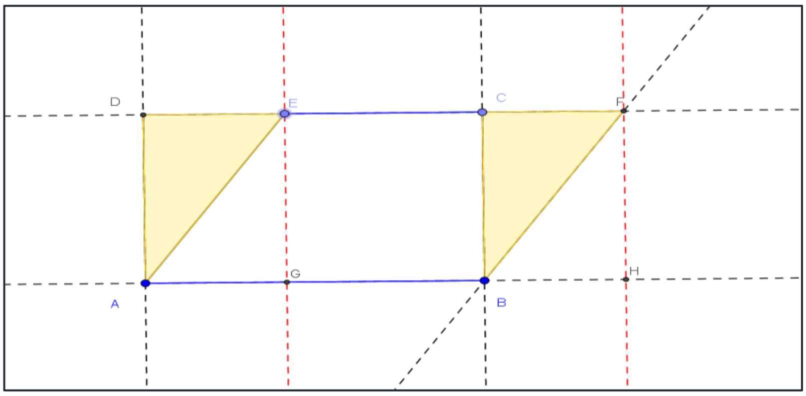


Figura 12

Consideriamo una “striscia” e in essa, per semplificare, un particolare parallelogramma ABCD, un rettangolo. L’altezza della striscia (la classe di tutti i segmenti perpendicolari che essa intercetta) è congruente con un lato del rettangolo avente quest’ultimo gli angoli retti. La classica costruzione della Figura 12 mette in evidenza la congruenza dei triangoli ADE, BCF, AGE e BHF come il parallelismo di AE e BE. **Otteniamo il parallelogramma AEFB *equivalente ad ABCD…***

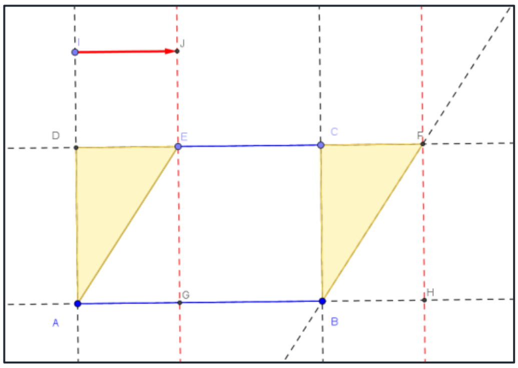


Figura 13

Proviamo a vedere la stessa cosa parlando di traslazione comune dei punti D e C secondo uno stesso vettore (Figura 13). Ci porta allo stesso risultato, ma con la semplificazione di una generalizzazione molto semplice anche quando la lunghezza del vettore supera il lato del rettangolo (Figura 14). La costruzione ci mette nelle condizioni di analizzare in modo molto semplice i poligoni in gioco da cui trarre l'equivalenza, tenendo <u>sempre in evidenza l'altezza della striscia</u>.

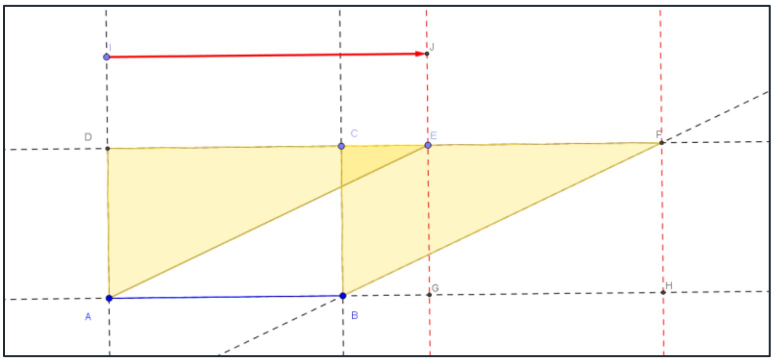


Figura 14

Solitamente noi diciamo che i parallelogrammi in gioco sono equivalenti (hanno la stessa area) perché hanno la stessa base e la stessa altezza (quasi come un refrain), forse dimenticando subito (o neppure considerando) che cosa siano **la "base" e "l'altezza**" degli stessi, cosa che invece è fondamentale per comprendere chiaramente l'equivalenza espressa (Figura 15).

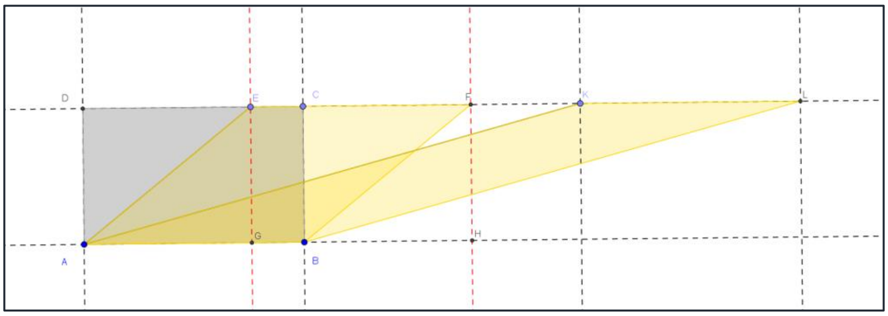


Figura 15

Euclide sente poi la necessità di generalizzare e ribadire l'equivalenza non solo quando la base sia la stessa, ma una ad essa congruente, proposizione 36:

Parallelogrammi che siano posti su basi uguali (congruenti) e fra le stesse rette parallele, sono uguali tra di loro.

Noi superiamo immediatamente il problema perché ogni costruzione che abbiamo preso in considerazione fa parte di una classe di equivalenza e necessariamente ciò che abbiamo raggiunto vale per tutta la classe. Nel lavoro con gli studenti questo è lasciato intuitivo … quasi senza accorgercene mettiamo intuizione e rigore insieme senza sottolinearlo.

Ancora più interessante il tutto diventa quando parliamo di triangoli (come metà di un parallelogramma) compresi in una striscia (Figura 16), dove la striscia con la sua "altezza" continua ad essere il fondamento della loro equivalenza, e da dove potrebbe emergere in altro modo il **"problema dell'altezza dei triangoli"** che produce molti problemi di comprensione e inutili difficoltà a seconda del tipo di triangolo che si considera.

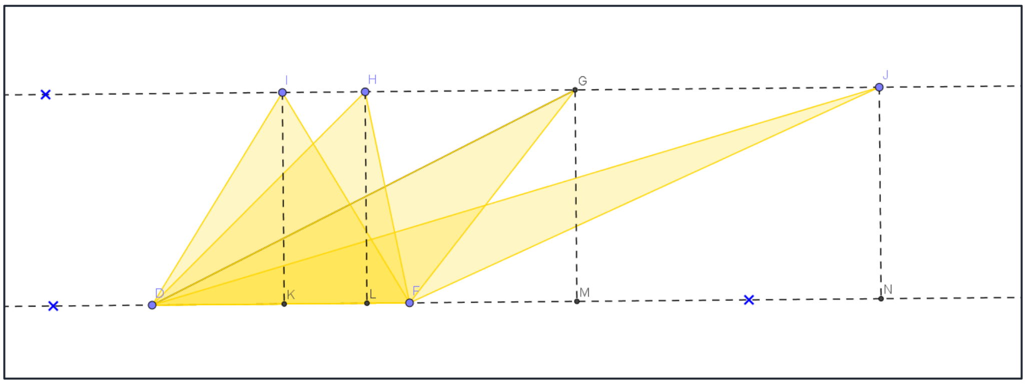


Figura 16

Oltre ad "avere in mano le forme", abbiamo ora in mano la possibilità di confrontarle come "aree", facendo divenire "strumento" tutto ciò che abbiamo raggiunto. Pensiamo anche solo ad un "problemino" come il seguente: *trasformare il quadrilatero ABCD in un triangolo equivalente*.

Lasciamo alla sequenza grafica la dimostrazione sfruttando gli strumenti raggiunti (Figura 17).

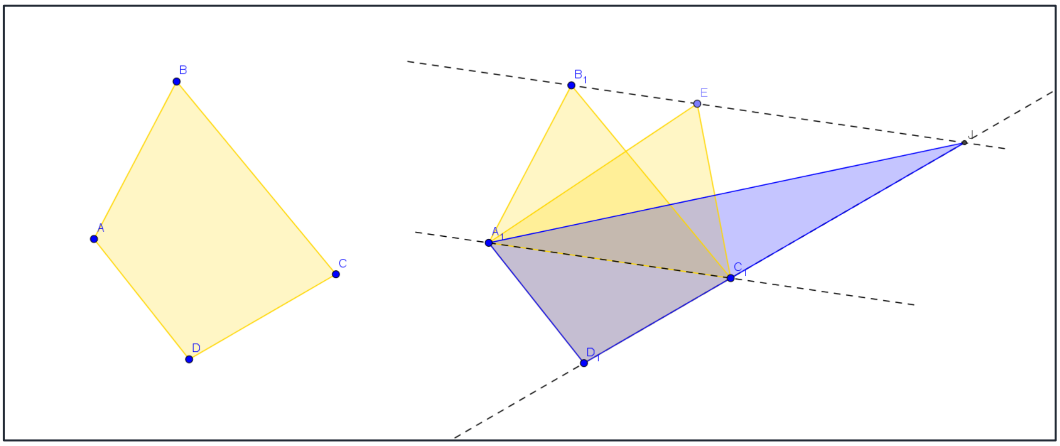


Figura 17

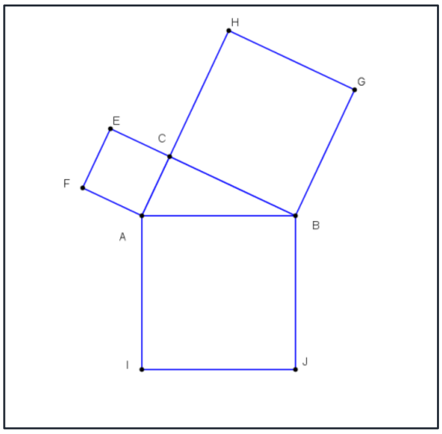


Figura 18. Primo passo

Adesso possiamo guardare al **teorema di Pitagora** come Euclide lo dimostra in una sequenza che evidenzia gli strumenti man mano costruiti (Figure 18, 19, 20, 21, 22, 23).

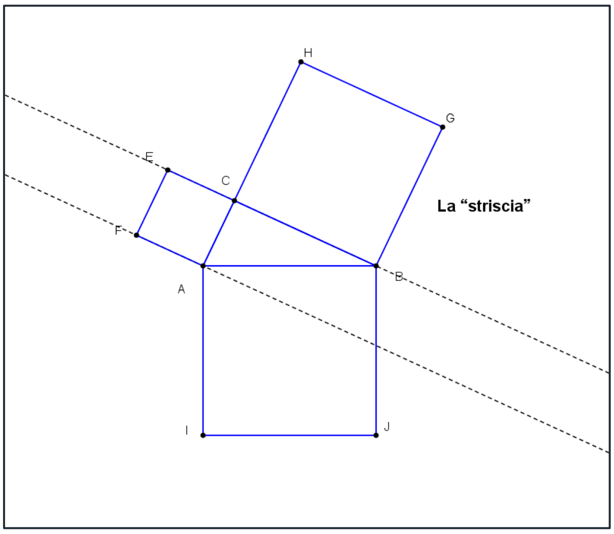


Figura 19. Secondo passo

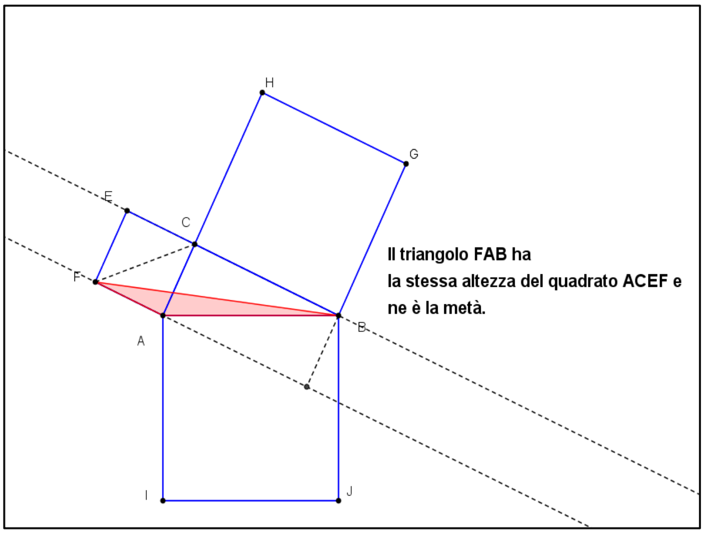


Figura 20. Terzo passo

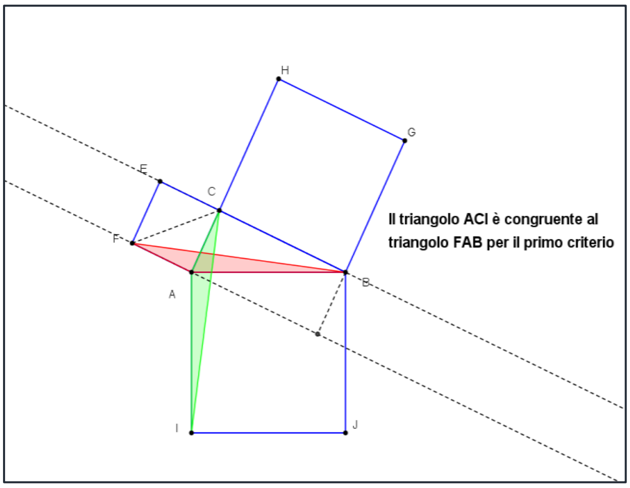


Figura 22. Quarto passo

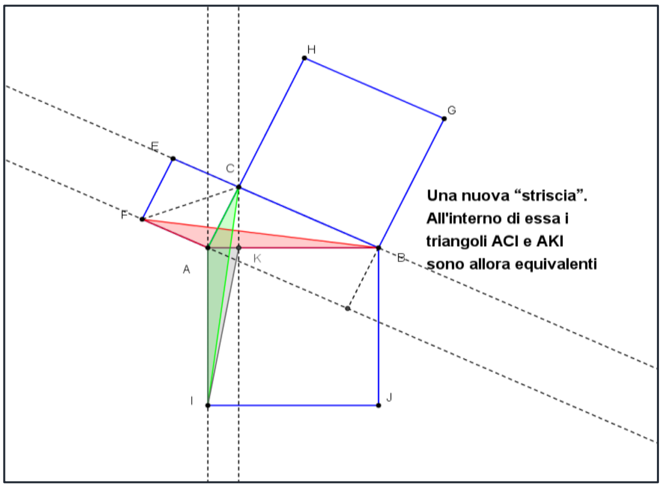


Figura 21. Quinto passo

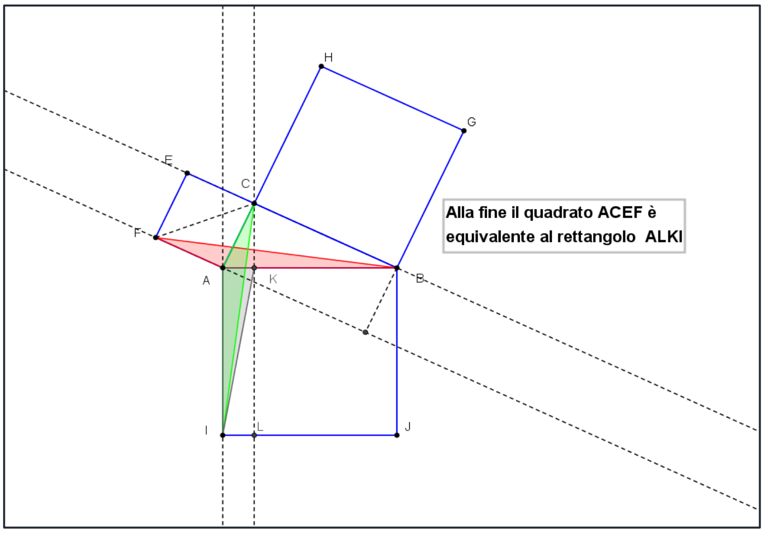


Figura 23. Sesto passo

È ovvio che tutto ciò che è stato evidenziato sopra sia per voi arcinoto e quindi non abbiamo bisogno di concludere, ma volevamo solo far vedere passo passo la coerenza della rigorosa sequenza con gli strumenti utilizzati.

Spesso si sostituisce la precedente sequenza con quella del tutto analoga che fa uso solo di equivalenze sulle “strisce” (Figura 24).

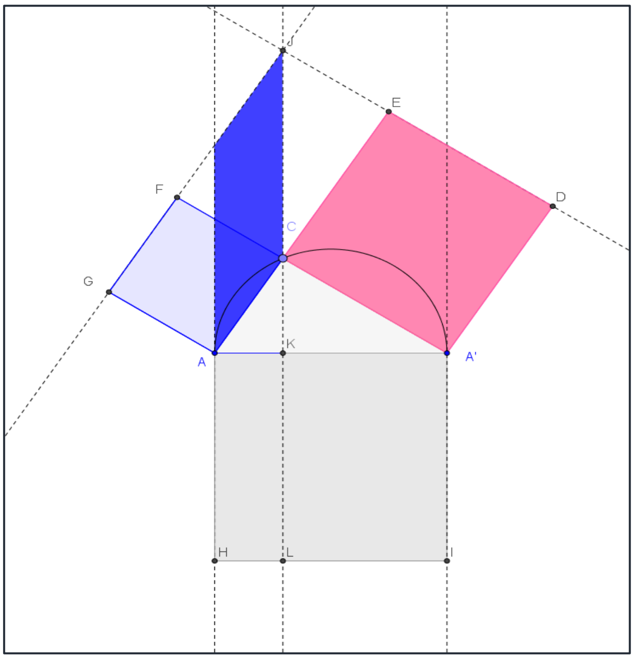
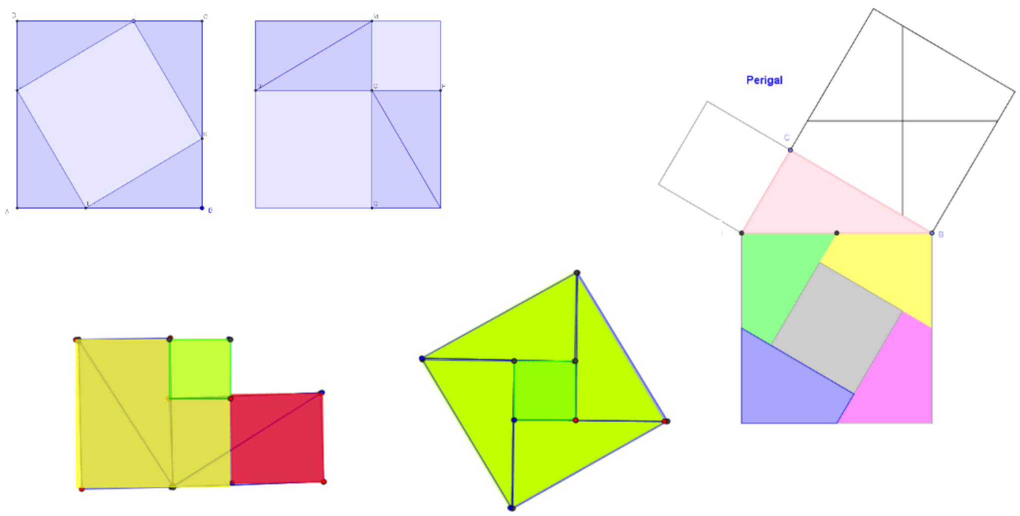


Figura 24

Le dimostrazioni del teorema di Pitagora nel corso dei secoli sono divenute infinite, sinteticamente si basano su equivalenze e tassellazioni (quasi dei “puzzle”) come abbiamo potuto vedere e presentano un’ampia scelta di approfondimenti che noi, con la professoressa Gallo, abbiamo completato anche con rigorosi “giochi” di traslazioni.



(*) *Maria Cantoni presenta nelle pagine precedenti riflessioni ed esempi didattici legati al lavoro svolto con gli insegnanti dell’Associazione* La casa degli insegnanti

http://www.lacasadegliinsegnanti.it/

In particolare si può fare riferimento alle relazioni (dedicate al biennio) di: Elisa Gallo, Maria Cantoni - “Parliamo di geometria-1” e ”Parliamo di geometria-2”, reperibili come podcast: http://podcast.lacasadegliinsegnanti.it/

E come GGbook:

https://ggbm.at/ZV2e8hkP

https://ggbm.at/WHrEZ2NW

(**) *Elisa Gallo. Docente di matematica all’Università di Torino, ha svolto ricerca sia di geometria sia di didattica della matematica. Su incarico del CNR ha guidato gruppi di insegnanti dei diversi livelli scolastici in lavori di didattica attiva*.

BIBLIOGRAFIA

1. http://www.carlofelicemanara.it
Sito da cui sono liberamente scaricabili tutti gli articoli e molti contributi inediti di C. F. Manara

2. Manara, C. F. *La generalizzazione del concetto di geometria*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, dicembre 1987, pp. 1197-1215, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, Paderno del Grappa.
3. Manara, C. F. *L'eguaglianza in geometria* 1. Nuova Secondaria n. 5 - 1988, pp. 65-67.
4. Manara, C. F. *L'eguaglianza in geometria* 2. Nuova Secondaria n. 6 - 1988, pp. 71-74.
5. Manara, C. F. *L'evoluzione della geometria nel secolo XIX e conseguenze didattiche.* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, novembre 1994, pp. 619-661, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, Paderno del Grappa.
6. Manara, C. F. *Trasformazioni geometriche*. Appunti per il Corso di perfezionamento in Didattica della matematica, Brescia, Università Cattolica del Sacro Cuore, Anno accademico 1994/95. (Appunti per il corso). In http://www.carlofelicemanara.it INEDITI, 9403 *Trasformazioni geometriche*.
7. Manara, C. F. *Costruire la geometria*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, agosto 1997, pp. 337-349, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, Paderno del Grappa.
8. Attilio Frajese. *Attraverso la storia della matematica*. Le Monnier, Firenze 1971.
9. Carl B. Boyer. *Storia della matematica*, ISEDI 1976.

10. www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/19_2geom.pdf

11. *http://web.math.unifi.it/users/ottavian/euclidel/euclidel.htm*